Teorema 2.66 *Sia I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotòna. Allora, la funzione inversa di f, $f^{-1} : f(I) \to I$, è una funzione continua.*

Dimostrazione Possiamo assumere che f sia strettamente crescente (altrimenti si consideri $-f$). Per la Proposizione 1.117, $f^{-1} : J := f(I) \to I$ è strettamente crescente. Fissiamo $y_0 \in J$. Se y_0 è un punto isolato, f^{-1} è continua in y_0. Supponiamo, ora, che y_0 non sia isolato e consideriamo separatamente i limiti laterali. Sia, dunque, y_0 un punto di accumulazione sinistro per J (ossia, $J \cap (y_0 - \delta, y_0) \neq \emptyset$ per ogni $\delta > 0$). Allora, essendo f^{-1} strettamente crescente,

$$f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) =: x_0 \ , \qquad \forall\ y \in J \ , \ y < y_0 \ , \tag{2.26}$$

e dunque, per la Proposizione 2.21,

$$\lim_{y \to y_0 -} f^{-1}(y) = \sup_{y \in J, y < y_0} f^{-1} =: \alpha \leq x_0 \ . \tag{2.27}$$

Supponiamo, per assurdo, che $\alpha < x_0$ e sia $y_1 \in J$ con $y_1 < y_0$. Allora, per definizione di α, $x_1 := f^{-1}(y_1) \leq \alpha$, e quindi (essendo I un intervallo) $[\alpha, x_0] \subseteq [x_1, x_0] \subseteq I$. Sia ora $\bar{x} \in I$ tale che $\alpha < \bar{x} < x_0$, e sia $\bar{y} = f(\bar{x})$. Tale punto appartiene a J e $\bar{y} < y_0$, ma $\alpha < \bar{x} = f^{-1}(\bar{y})$ contraddice la definizione di α. Dunque in (2.27) deve valere l'uguaglianza, ossia,

$$\lim_{y \to y_0 -} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) \ .$$

In maniera del tutto analoga si dimostra (esercizio) che se y_0 è un punto di accumulazione destro per J allora

$$\lim_{y \to y_0 +} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) \ ,$$

e dunque, per la Proposizione 2.22, f^{-1} è continua in y_0. ∎